

Def 15.2

Seien $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ ⁻⁸⁸⁻

für $k \in \mathbb{N}$.

a) Die formale Bildung

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

heißt eine trigonometrische Reihe. Diese

heißt punktweise konvergent auf $D \subset \mathbb{R}$,

falls

$$\frac{a_0}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

für alle $x \in D$ existiert.

Entsprechend: gleichmäßige Konvergenz auf
einer Teilmenge D von $\mathbb{R}$

b) Komplexe Schreibweise:

- 89 -

Man setzt für $k \in \mathbb{Z}$

$$c_k := \begin{cases} \frac{1}{2} (a_k - i b_k), & k > 0, \\ \frac{1}{2} a_0, & k = 0, \\ \frac{1}{2} (a_{-k} + i b_{-k}), & k < 0. \end{cases}$$

Dann gilt:

$$(*) \quad \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Sind umgekehrt für $k \in \mathbb{Z}$ Zahlen $c_k \in \mathbb{C}$ gegeben, so setzt man für $k \in \mathbb{N}$

$$a_k := c_k + c_{-k}, \quad b_k := i(c_k - c_{-k}), \quad a_0 := 2c_0$$

und bekommt (*).

Wir bevorzugen die kürzere Symbolik - 90 -

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

für die trigonometrische Reihe aus a.).

Bem: In Übereinstimmung mit a) bedeutet

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

die Bildung von $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$,

falls der Grenzwert existiert. Die Existenz

dieses Grenzwertes ist garantiert, falls die beiden Limiten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n c_k e^{ikx}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n c_{-k} e^{-ikx}$$

existieren. Die Umkehrung ist falsch!

Z.B.
$$\begin{cases} c_k := \frac{1}{k} & \text{für } k \in \mathbb{Z} - \{0\}, c_0 := 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

Folgerungen aus der Definition:

- ① Sei $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ punktweise konvergent
auf $\mathbb{R}$ gegen einen Grenzwert $:= f(x)$
 $\Rightarrow f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch,
d.h. $f(x + 2\pi) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Beweis: die Partialsummen sind 2π -periodisch

- ② Ist die Konvergenz lokal glm., also glm.
auf allen $[a, b]$, so folgt:

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-m \cdot ix} f(x) dx, m \in \mathbb{Z}$$

Speziell: $c_0 = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx}_{\text{Mittelwert von } f}$

Beweis: Es ist

$$\int_0^{2\pi} e^{-imx} f(x) dx \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Def. von } f}}{=} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \right) \cdot e^{-imx} dx$$

glm.
Kugnz
=

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx$$

Nun beachte die

Orthogonalitäts-
relation

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx =$$

$$\begin{cases} 2\pi, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Formel für $c_m, m \in \mathbb{Z}$.



1^{ter} Gesichtspunkt:

Vorgabe von $c_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$,
definiere (formal) $f(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

Fragestellung: unter welchen Bdg. an
 c_n ist f definiert, stetig, etc.?

2^{ter} Gesichtspunkt: (der viel wichtiger ist)

Vorgabe von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -period.

Problem: gibt es $c_n \in \mathbb{C}$ mit

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad ?$$

-94-

Zu 1. gibt folgender Satz eine Antwort

Satz 15.5: Seien $c_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$,

gegeben mit

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |c_n| < \infty.$$

Dann ist

$$f(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} c_n$$

auf $\mathbb{R}$ wohldefiniert, stetig und 2π -
periodisch mit

$$(*) \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Beweis: Gemäß $|c_n e^{inx}| = |c_n|$ - 95-

und der absoluten Summierbarkeit von c_n

folgt mit dem "Majorantenkriterium"
(vgl. Korollar zu Satz 13.1) alles. $\square$

Wir diskutieren den 2^{ten} Gesichtspunkt:

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ 2π -periodisch

mit

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| dx < \infty.$$

D.h.: $|f|$ ist über $[0, 2\pi]$ eigentlich
oder uneigentlich int'bar

Dann ist

$$\begin{cases}
 c_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx, \\
 n \in \mathbb{Z},
 \end{cases}$$

wohldefiniert (gemäß $\circledast$ ist das die einzig sinnvolle Wahl!), und man kann fragen, ob und in welchem Sinne

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

gilt.

Def 15.3: Sei f wie oben. Die gemäß $\circledast$ erklärten Zahlen $c_n \in \mathbb{C}$ heißen die Fourier-Koeffizienten von f . Die zunächst formale Bildung $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ heißt Fourier-Reihe von f .

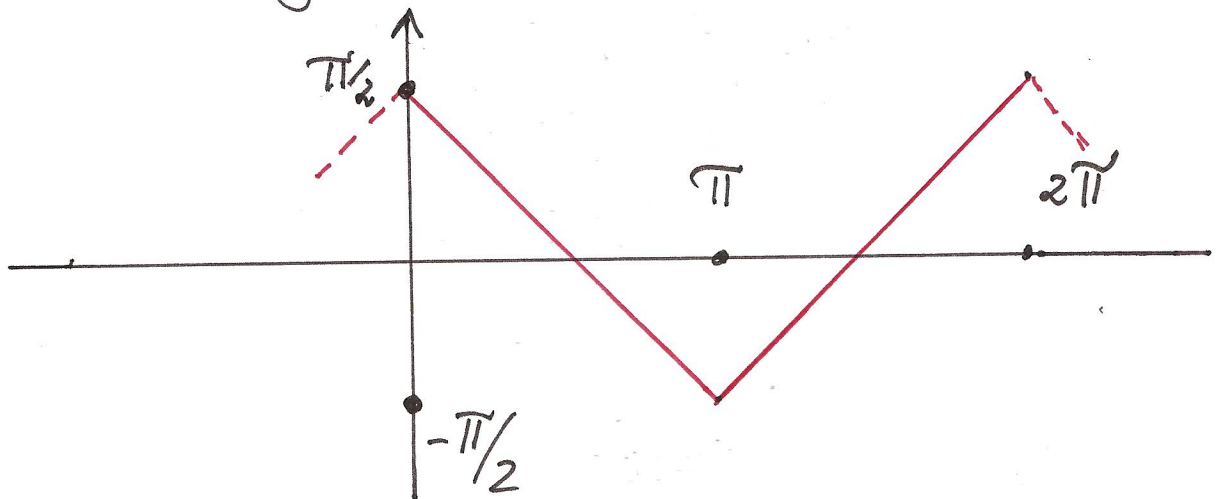
Wie bei Taylor-Reihen stellen sich - 97 -

Zwei Fragen:

- Konvergenz der Fourier-Reihe für gewisse $x \in \mathbb{R}$?
- und wenn ja, Konvergenz gegen $f(x)$?

Gerade die Antwort auf Frage 2 ist bereits für einfache f sehr kompliziert, wenn man keine Theorie hat! Dazu ein

Beispiel: Sägezahn-Funktion



$$f(x) := \begin{cases} \pi - x, & 0 \leq x \leq \pi \\ x - \frac{3}{2}\pi, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

(+ 2π -periodische Fortsetzung auf $\mathbb{R}$)

$$\Rightarrow c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) e^{-inx} dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (x - \frac{3}{2}\pi) e^{-inx} dx$$

vgl. Blatt 4/A5

= ... elementare Rechnung ...

$$= \frac{1}{n^2 \pi} (1 - \cos(n\pi)), \quad n \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

c_0 = Mittelwert von f über eine Periode = 0 klar!

offenbar: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$

Satz $\xRightarrow{15.5}$ $g(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ wohl-

definiert auf $\mathbb{R}$, stetig und 2π periodisch

Die Anteile $\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx}$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx}$

konvergieren separat $\Rightarrow$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (e^{inx} + e^{-inx})$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ c_n = c_{-n} \end{array}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n \cos(nx) \Rightarrow$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} \left(1 - (-1)^n\right) \cos(nx) \quad -100-$$

Frage: Gilt $g = \text{Sägezahnfunktion}$?

Bevor wir uns dieser Frage widmen,
noch einige

elementare Beobachtungen:

oft schreibt man die formale Fourier-
Reihe einer Funktion f auch in der Form

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right),$$

wobei (vgl. Def. 15.2 !)

$$a_k = c_k + c_{-k}, \dots$$

Mit der Formel

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

für den n -ten Fourier-Koeffizienten ($n \in \mathbb{Z}$)

folgt:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Daraus liest man ab:

$$\left\{ \begin{array}{ll} f \text{ reellwertig} & \implies a_k, b_k \in \mathbb{R}; \\ f \text{ gerade} & \implies b_k = 0 \text{ (keine Sinus Anteile)} \\ f \text{ ungerade} & \implies a_k = 0 \text{ (keine Cosinus Anteile)} \end{array} \right.$$

Zurück zur „Frage“ zum Konvergenzverhalten
der Fourier-Reihe gegen die Startfunktion.

Bis auf Widerruf betrachten wir

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{2\pi\text{-periodische Regelfunktionen}} \\ \underline{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}} \end{array} \right\}$$

(Spezialfall: f stetig + 2π -periodisch)

Zur Erinnerung: Die Ergebnisse aus §12
+ Periodizität von f liefern:

- f ist beschränkt
- $f(x \pm)$ existieren an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$
- die Menge der Sprungstellen ist höchstens abzählbar.

Vereinbarung:

$$f(x) = \frac{1}{2} (f(x+) + f(x-)) \\ \forall x \in \mathbb{R}$$

D.h.: In Sprungstellen ersetzt man $f(x)$
durch den Mittelwert.

Für stetige f passiert also nichts.

Satz 15.6: (von Fejér)

Zu f wie oben berechnet man die Fourier-Koeff. c_k , $k \in \mathbb{Z}$. Für

$m \in \mathbb{N}_0$ sei

$$S_m(x) := \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx}$$

(Partialsummen der Fourier-Reihe).

Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = f(x),$$

wobei $(n \in \mathbb{N})$

$$\sigma_n(x) := \frac{1}{n} \left(S_0(x) + \dots + S_{n-1}(x) \right)$$

die „Mittelwerte“ bezeichnet.

Außerdem ist

$$\| \tilde{G}_n \| := \sup_{\mathbb{R}} | \tilde{G}_n(x) |$$

unabhängig von n beschränkt.

Bemerkung: Eigentlich möchte man ja die Konvergenz

$$S_m(x) \longrightarrow f(x), \quad m \rightarrow \infty.$$

Falls das gilt, so folgt daraus

$$\tilde{G}_n(x) \longrightarrow f(x), \quad n \rightarrow \infty.$$

$$\text{Prinzip: } \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_m) \text{ konvergente Zahlenfolge,} \\ \beta_n := \frac{1}{n} (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) \end{array} \right\}$$

$\implies (\beta_n)$ konvergiert gegen Limes von (α_m)
(vgl. Ana I)

Die Umkehrung ist falsch:

$$\alpha_m := (-1)^m, \quad \beta_n \rightarrow 0$$

↑ 7. Lektion

Beweisverlauf: Details zu finden in

Barner + Flohr, Analysis I, p. 458f

1^{ter} Schritt: unter Benutzung von Formeln

Wie

$$y \notin 2\pi\mathbb{Z}: \sum_{k=-m}^m e^{iky} = \frac{\cos(my) - \cos((m+1)y)}{1 - \cos y}$$

zeige man durch Rechnung

$$S_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(my) - \cos((m+1)y)}{1 - \cos y} f(x+y) dy$$

$$(S_m(x) = \sum_{k=-m}^m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iky} f(y) dy e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-m}^m \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik(y-x)} f(y) dy = \dots)$$